

Hong Kong Mathematics Olympiad (2008 – 2009)

Heat Event (Individual)

香港数学竞赛 (2008 – 2009)

初赛项目(个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。

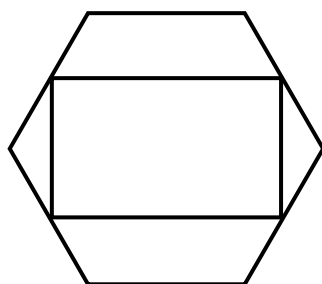
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 设  $x = 0.\dot{2}\dot{3} + 0.00\dot{2}\dot{3} + 0.0000\dot{2}\dot{3} + 0.000000\dot{2}\dot{3} + \dots$ ，求  $x$  的值。

Let  $x = 0.\dot{2}\dot{3} + 0.00\dot{2}\dot{3} + 0.0000\dot{2}\dot{3} + 0.000000\dot{2}\dot{3} + \dots$ , find the value of  $x$ .

2. 如图一，给定一正六边形及一矩形，矩形的顶点是六边形的四条边的中点。若矩形与六边形的面积之比为  $1:q$ ，求  $q$  的值。

In Figure 1, a regular hexagon and a rectangle are given. The vertices of the rectangle are the mid-points of four sides of the hexagon. If the ratio of the area of the rectangle to the area of the hexagon is  $1:q$ , find the value of  $q$ .



图一

Figure 1

3. 设  $16\sin^4\theta^\circ = 5 + 16\cos^2\theta^\circ$  且  $0 \leq \theta \leq 90$ ，求  $\theta$  的值。

Let  $16\sin^4\theta^\circ = 5 + 16\cos^2\theta^\circ$  and  $0 \leq \theta \leq 90$ , find the value of  $\theta$ .

4. 设  $m$  为  $\gcd(2008, 4518)$  的正因子个数，其中  $\gcd(2008, 4518)$  是 2008 与 4518 的最大公因子。求  $m$  的值。

Let  $m$  be the number of positive factors of  $\gcd(2008, 4518)$ , where  $\gcd(2008, 4518)$  is the greatest common divisor of 2008 and 4518. Find the value of  $m$ .

5. 已知  $x^2 + (y-3)^2 = 7$ ，其中  $x$  及  $y$  为实数。若  $5y + x^2$  的极大值为  $k$ ，求  $k$  的值。

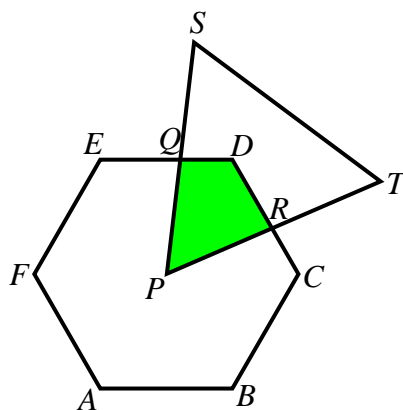
Given that  $x^2 + (y-3)^2 = 7$ , where  $x$  and  $y$  are real numbers. If the maximum value of  $5y + x^2$  is  $k$ , Find the value of  $k$ .

6. 设  $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ ，及  $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ ，其中  $n = 2, 3, 4, \dots$ 。求  $f_{2009}(2008)$  的值。

Let  $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$  and  $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ , where  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Find the value of  $f_{2009}(2008)$ .

7. 在图二中， $ABCDEF$  是一正六边形，其中心点是  $P$ 。 $\triangle PST$  是一等边三角形。已知  $AB = 6$  cm， $QD = 2$  cm 及  $PT = 12$  cm。若六边形与三角形的公共部分面积为  $c$  cm<sup>2</sup>，求  $c$  的值。

In Figure 2,  $ABCDEF$  is a regular hexagon centered at the point  $P$ .  $\triangle PST$  is an equilateral triangle. It is given that  $AB = 6$  cm,  $QD = 2$  cm and  $PT = 12$  cm. If the area of the common part of the hexagon and triangle is  $c$  cm<sup>2</sup>, find the value of  $c$ .



图二

Figure 2

8. 求  $7^{2009}$  的个位值。

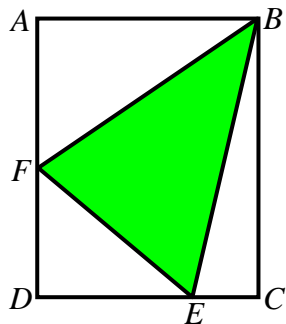
Find the unit digit of  $7^{2009}$ .

9. 已知  $a$  和  $b$  是整数。设  $a - 7b = 2$  及  $\log_{2b} a = 2$ ，求  $a \times b$  的值。

Given that  $a$  and  $b$  are integers. Let  $a - 7b = 2$  and  $\log_{2b} a = 2$ , find the value of  $a \times b$ .

10. 如图三， $ABCD$  为一矩形。 $E$  及  $F$  分别在  $CD$  及  $AD$  上使得  $AF = 8 \text{ cm}$  及  $EC = 5 \text{ cm}$ 。已知阴影部分的面积是  $80 \text{ cm}^2$ 。设矩形  $ABCD$  的面积为  $g \text{ cm}^2$ ，求  $g$  的值。

In Figure 3,  $ABCD$  is a rectangle. Points  $E$  and  $F$  lie on  $CD$  and  $AD$  respectively, such that  $AF = 8 \text{ cm}$  and  $EC = 5 \text{ cm}$ . Given that the area of the shaded region is  $80 \text{ cm}^2$ . Let the area of the rectangle  $ABCD$  is  $g \text{ cm}^2$ , find the value of  $g$ .



图三

Figure 3